Türkiye Jeofizikçiler Derneği Yayınları C. IV, S. IV, S (55-62) Aralık 1975
Publications of Geophysicists Society of Turkey V. IV, N. IV, P (55-62)
December 1975

İZOTROPİK ORTAMLARDAKİ ELASTİK YER DEĞİŞTİRMELER İÇİN GREEN FONKSİYON YÖNTEMİ

Tensor Green's Function for Elastic Displacement

Z. NAZİKOĞLU*

ÖZ :

Bu çalışmada izotropik ortamlardaki elâstik yer değiştirmeler (displacemets) için GREEN fonksiyon yöntemi sunulmaktadır. Bu yöntem nokta-kaynak düşüncesinden hareketle geliştirilmiştir.

Yöntemin geliştirilmesi elektromağnetik ve dislokasyon teorileri arasındaki benzerlikten yararlanılarak POISSON denklemine benzer bir ifadenin çıkarılması ile sağlanmıştır. Böylece fiziksel bir sistemi etkileyen kuvvetlerin her hangi bir dağılımının oluşturduğu deformasyon bu yeni geliştirilen ifadenin genel çözümünden saptanabilecek ve dislokasyon teorisinde nokta-kaynağın yayılmasının ve iğri dislokasyonların oluşturduğu yer değiştirmelerin bulunmasında kullanılabilecektir.

ABSTRACT :

This paper presents a study of the Green's function method for the elastic displacements in isotropic media. The method derives from the consideration of point forces.

Because of the general analogy between electromagnetic and dislocation theories, we attempt to develop an expression like Poisson's equation so that the deformation caused by any distribution of forces can be determined from the general solution of developed equation.

The application of the tensor Green's function can be found in dislocation theory. Such applications are (1) point source of expantion (2) displacement caused by curved dislocation.

GİRİŞ :

Elastisite teorilerinde çoğunluk nokta-kaynak varsayımından hareketle sorunlara güçlü çözüm yöntemleri getirir. Bu durum özellikle dislokasyon teorisinde önem kazanır.

Eğer bir maddesel noktanın bir nokta-kaynağa göre davranışı biliniyorsa, o kütleye etki eden kuvvetlerin her hangi bir dağılımının oluşturduğu deformasyon (şekil bozulması) integrasyon yolu ile kolayca saptanabilir. Sorun, hemen hemen, ρ yük dağılımının oluşturduğu elektrostatik potansiyel V'nin bulunması gibidir. Dolayısıyla elâstik yer değiştirmeler için çözümler elektrostatikteki GREEN FONKSİYON YÖNTEMİ'nden türetilmiştir. Bunun için önce elektromagnetik teori ile dislokasyon teorisi arasındaki benzer-

* M.T.A. Enstitüsü — ANKARA

likten yararlanılarak, elektrostatik durum incelenmiş. sonradan matematiksel işlem elâstisiteye uygulanarak benzer ifadeler türetilmiştir.

ELEKTROSTATİK PROBLEM

Genel olarak verilen bir yük dağılımına ilişkin elektrostatik potansiyel fonksiyonun ya Laplace veya Poisson denkleminin gerekli sınır koşullarını sağlayan çözümlerinden saptandığı bilinir.

Elektrostatik potansiyel $V(\vec{r})$'nin gradiyenti, elektrik alan ile, elektrik alanın diverjansı da yük yoğunluğu $\rho(\vec{r})$ ile

(1) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

(2) $\vec{\nabla}_o \vec{E} = \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_o}$

(1) ve (2) formüllerinde gösterildiği biçimde orantılıdır. Ancak (1) denklemi (2) nolu denklemde yerine konursa

$$\vec{\nabla}_o \vec{E} = \vec{\nabla}_o [-\vec{\nabla} V(\vec{r})] = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_o}$$

olur.

Eğer bu son eşitliğin iki tarafı $1/4\pi$ ile çarpılırsa

$$\left(\frac{1}{4\pi}\right)\vec{\nabla}_o [-\vec{\nabla} V(\vec{r})] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\rho(\vec{r})$$

elde edilir. $4\pi\varepsilon_o = 1$ olduğu bilindiğinden

$$\vec{\nabla}_o [-\vec{\nabla} V(\vec{r})] = \rho(\vec{r})$$

veya

(3) $\nabla^2 V(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$

olur ki, bu ifade POISSON denkleminden başkası değildir. Halbuki Poisson denkleminin genel çözümü

(4) $V(\vec{r}) = \displaystyle\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$

dir. Bu ifade fiziksel olarak $\vec{r}$ deki toplam potansiyelin $\rho(\vec{r}')dV'$ yüklerinin her bir küçük $d\vec{V} = \rho(\vec{r}')dV'/|\vec{r}-\vec{r}'|$ katkılarının toplamından elde edilir.

$\vec{r}_o$ daki bir q nokta yük için

(5) $\rho(\vec{r}') = q\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_o)$

olarak yazılır. Burada $\delta(\vec{r}'-\vec{r}_o)$ Dirac delta fonksiyonudur. Ancak Dirac' delta fonksiyonu aşağıdaki özelliğe sahiptir :

$$\int f(\vec{r}')\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_o)\,dV' = f(\vec{r}_o)$$

burada $f(\vec{r}')$ her hangi bir fonkiyondur. Bu özellikten de yararlanılarak, eğer (5) nolu ifade (4) nolu denklemde yerine konursa nokta-yükün oluşturduğu potansiyel için Green Fonksiyonu

$$(6) \quad V(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_o|}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3) nolu ifade de $\rho(\vec{r}') = q\,\delta\,(\vec{r}'-\vec{r}_o)$ ve $V(\vec{r}) = \dfrac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_o|}$

ifadeleri yerine konursa

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

$$\nabla^2 \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_o|} = -4\pi q\,\delta\,(\vec{r}-\vec{r}_o)$$

$$(7) \quad \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_o|} = -4\pi\,\delta\,(\vec{r}-\vec{r}_o)$$

elde edilir. Böylece Green Fonksiyon Yöntemi ile, her hangi bir noktadaki potansiyel (4) nolu ifadenin intergrasyonu ile saptanabilmektedir. Ancak bu integrasyon işlemi sürekli bir yük dağılımı üzerine yapılmakta ve her bir yük elementi $\rho(\vec{r}')\,dV'$ potansiyele, $\vec{r}'$ noktasına yerleşmiş bir nokta yük gibi katkıda bulunmaktadır.

İZOTROPİK ORTAMLARDA ELASTİK YER DEĞİŞTİRMELER

Önceki bölümde bir yük dağılımının oluşturduğu elektrostatik potansiyel incelenerek, her hangi bir noktadaki potansiyel, Green fonksiyon yöntemi ile saptandı. Elektromagnetik ve dislokasyon teorileri arasındaki yakın benzerlik aynı yöntemin elastisiteye de uygulanmasına olanak vermektedir.

Elastisite probleminde $\vec{U}$ elastik yer değiştirme, elektrostatik potansiyel V ve $\vec{F}$ yük kuvvetleri, yük yoğunluğu ρ yerine kullanılmaktadır. Bu durumda amacımız (5) nolu Poisson denklemine benzer bir ifade geliştirerek (6) nolu eşitlik gibi bir ifadeden elastik yer değiştirmeyi saptamak olacaktır. Ancak bu ifadeleri geliştirmeden önce, sırası gelmişken, elastisitede Hooke kanunu ve izotropi kavramına değinmenin yararı olacağı kanısındayız.

Uygulamada gözlenir ki, belli limitler içinde elastik bir katı cisimde oluşan strain doğrudan o katı cisme tatbik edilen stresslerle orantılıdır. Bu stress-strain oranı basitçe elastisitede Hooke kanunu olarak bilinir ve bu kanunun genelleştirilmiş şekli şöyle ifade edilir. Bir cismin her hangi bir noktasına etki eden streesin 6 (altı) bileşeninden herbiri o yapıda oluşan strainin 6 (altı) bileşeninin lineer bir fonksiyonudur.

Böylece stress-strain bağlılığı

$$(8) \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$$

olarak ifade edilir. Burada σ_{ij}, cisimdeki stressi, ε_{kl} ise ilgili straini gösterir. C_{ijkl} de elastik katsayılardır. Bu elastik katsayılar çoğunlukla matrix notasyonu ile C_{mn} olarak gösterilir ki, burada m ve n'ler indislerdir ve ij ve kl indis çiftlerinin yerine kullanılmışlardır.

Katı cismin her bir infinitesimal (sonsuz küçük) hacım elementi hiçbir kuvvetin etkisi altında değilse (denge konumunda ise) mekanik olarak denge halinde olduğu bilinir. Bu durumda eğer içerlek tork (burulma) yoksa, sonsuz küçük element üzerinde net burulma da olmayacak ve dolayısıyla

(9) $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$

olarak ifade edilebilecektir.

Straini incelerken basitçe tanımını yapmanın yararı açıktır. Strain, bir birim uzaklık için bir noktanın yerinin stress sonucu rölatif değişimi olarak bilinir. Diğer bir değişle, bir noktanın yerinin komşu noktalara göre değişiminin orijinal nokta ile referans noktaları arasındaki uzaklığa bölümü strain olarak tanımlanır.

Eğer x_i (i=1,2, veya 3) ortogonal kartezyen koordinatlarda verilmiş ve $\vec{r}$ noktasındaki yer değiştirme (displacement) U_i bileşenlerini içerirse bu durumda strain

(10) $$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right]$$

ifadesi ile belirlenir. (9) nolu eşitlik ve $\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{lk}$ özelliğinden elastik katsayılar için doğrudan

(11) $C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk}=C_{jilk}$

yazılır.

(10) ve (11) nolu ifadelerin (8) nolu eşitlikte yerlerine konulması ile

(12) $$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\frac{\partial U_k}{\partial x_l}$$

ifadesi elde edilir. Halbuki diğer taraftan klasik elastisitenin denge denklemi

(13) $$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+F_i=0$$

olarak verilir. Bu denklemde F_i, sistemin birim hacmına etki eden kuvvetin i'inci bileşenidir ve burada, ayrıca söz edilmeksizin, belli sayıdaki indislerin toplamı anlaşılmalıdır. Böylece (12) nolu ifade (13) nolu denklemde yerine konulduğunda

(14) $$C_{ijkl}\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j\,\partial x_l}+F_i=0$$

elde edilir. Bir isotropik katı cisim (elastik davranışı yöne bağlı olmayan) söz konusu olduğunda elastik katsayılar ikiye indirgenmiş olur ki bunlar λ (Lame, parametresi) ve μ (shear modulü)'dür. Bu işlem

(15) $C_{ijkl}=\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}$

belirlenmektedir. Burada δ, Kronecker delta

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{eğer } i\neq j\\ 1 & \text{eğer } i=j\end{cases}$$

özelliği taşır.

Stress - strain ilişkisi bir isotropik katı cisim için C_{mn} elastik katsayılarını içeren matrix formunda aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$C=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}$$

Böylece

$$\sigma_{11}=C_{11}\varepsilon_{11}+C_{12}\varepsilon_{22}+C_{12}\varepsilon_{33}=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{33}$$
$$\sigma_{22}=C_{12}\varepsilon_{11}+C_{11}\varepsilon_{22}+C_{12}\varepsilon_{33}=\lambda\varepsilon_{11}+(\lambda+2\mu)\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{33}$$
$$\sigma_{33}=C_{12}\varepsilon_{11}+C_{12}\varepsilon_{22}+C_{11}\varepsilon_{33}=\lambda\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}+(\lambda+2\mu)\varepsilon_{33}$$
$$\sigma_{23}=2C_{44}\varepsilon_{23}=\mu\varepsilon_{23}$$

Bütün bunlardan, izotropi hali dikkate alınırsa, (15) nolu ifade (14) nolu denklemde yerine konursa

$$[\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}]\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j\,\partial x_l}+F_i=0$$

olur. J, k l indisleri üzerinde toplama işleminin yapıldığı varsayıldığında, yukarıdaki ifadeden :

Çarpımın ilk terimi : $k=i,\ l=j$: $\mu\dfrac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\,\partial x_j}$

Çarpımın ikinci terimi : $l=i,\ k=j$: $\mu\dfrac{\partial^2 U_j}{\partial x_i\,\partial x_j}$

Çarpımın üçüncü terimi : $j=i,\ k=l$: $\lambda\dfrac{\partial^2 U_k}{\partial x_i\,\partial x_k}$

Burada k her hangi bir değişkendir. Yukarıdaki terimlerin toplam ifadesi k ve j indislerinin de değişebilirliğinden yararlanılarak

$$\mu\left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j\,\partial x_j}+\frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j\,\partial x_i}\right]+\lambda\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_i\,\partial x_k}+F_i=0$$

veya

(16) $$(\mu+\lambda)\left[\frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j\,\partial x_i}\right]+\mu\frac{\partial^2 U_i}{\partial^2 x_j}+F_i=0$$

yazılır. (16) nolu ifade vektör notasyonu kullanılarak

(17) $$(\mu+\lambda)\,\vec{\nabla}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})+\mu\,\nabla^2\vec{U}+\vec{F}=0$$

şeklinde yazılır.

Bir an için özellikle sisteme etki eden kuvvetlerin bir bileşeni ile uğraşalım ve sonradan sonucu genelleştirelim. Diğer bir deyişle, bir nokta kuvvetin $F_1\,\delta\,(\vec{r})$, orijinde etki ettiğini varsayalım. Bu durumda denge denklemini inceleyelim :

(18)
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})+\mu\nabla^2 U_1+F_1\,\delta\,(\vec{r})=0$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})+\mu\,\nabla^2 U_2=0$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_3}(\vec{\nabla}\cdot\vec{U})+\mu\,\nabla^2 U_3=0$$

Bilindiği gibi bir vektör alan $\vec{U}$, bir skalar potansiyel Φ ve bir vektör potansiyel $\vec{A}$ terimleri ile

(19) $$\vec{U}=\vec{\nabla}\Phi+\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca bu ifade ((19) nolu ifade) $\vec{\nabla}\cdot\vec{U}=\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}\Phi+\vec{\nabla}\times\vec{A}]$ veya $\vec{\nabla}\cdot\vec{U}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi+\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})}_{=0}$ olduğundan

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \nabla^2 \Phi \tag{20}$$

olur. Bu eşitlik (18 nolu denkleme uygulandığında

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2\Phi + \mu\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right]\nabla^2 + F_1\,\delta\,(\vec{r}) = 0$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2\Phi + \mu\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right]\nabla^2 = 0$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\nabla^2\Phi + \mu\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right]\nabla^2 = 0$$

burada A_1, A_2, ve A_3 $\vec{A}$ vektör potansiyelinin bileşenleridir. Terimlerin yeniden düzenlenmesi ve türevlerin sıralarının değiştirilmesi sonucu

$$\begin{aligned} &(\lambda+2\mu)\nabla^2\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \mu\nabla^2\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + F_1\,\delta(\vec{r}) = 0 \\ &(\lambda+2\mu)\nabla^2\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \mu\nabla^2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) = 0 \\ &(\lambda+2\mu)\nabla^2\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \mu\nabla^2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Diğer taraftan kolayca $\nabla^2 |\vec{r}| = \dfrac{2}{|\vec{r}|}$ olduğu gösterilebilir ki böylece (7) nolu denklem

$$\nabla^2\nabla^2|\vec{r}| = -8\pi\,\delta\,(\vec{r}) \tag{22}$$

veya

$$\delta\,(\vec{r}) = -\nabla^2\frac{\nabla^2|\vec{r}|}{8\pi} \tag{23}$$

olarak belirlenir.

Bütün bunlardan sonra yukarıdaki ifadelerde yer alan dört (4) bilinmeyen Φ, A_1, A_2 ve A_3 (21) nolu ifadede gösterilen üç (3) kısmî diferansiyel denklemden saptanabilir. Bunun için r'yi $\vec{r}$'nın magnitüdü olarak seçelim ve $A_1=0$ olsun. Eğer $\delta(\vec{r}) = -\nabla^2\dfrac{\nabla^2 r}{8\pi}$ ifade (21) nolu denklemde yerine konursa

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \mu\nabla^2\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) - F_1\nabla^2\frac{\nabla^2 r}{8\pi} = 0 \tag{21 - 1}$$

veya

$$\nabla^2\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) - F_1\frac{\nabla^2 r}{8\pi}\right] = 0$$

$$\nabla^2\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \mu\left(-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\right] = 0 \tag{21 - 2}$$

$$\nabla^2\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \mu\frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right] = 0 \tag{21 - 3}$$

Bilindiği gibi Laplace denkleminin en basit çözümü bir sabittir : örneğin sıfır, bu durumda (21 - 1) denklemi aşağıdaki ifadeyi verir.

$$(24) \qquad (\lambda+2\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)=\frac{F_1}{8\pi}\nabla^2 r$$

Fakat

$$(25) \qquad \nabla^2 r=\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2}$$

olarak bilindiğinden, (25) nolu eşitlik (24) nolu denklemde yerine konursa

$$\nabla^2 r-\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2}=\frac{8\pi}{F_1}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\right]$$

elde edilir. Bu ifadenin iki tarafı terim terim karşılaştırıldığında :

$\frac{\partial}{\partial x_1}$ terimi $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\cdot\frac{8\pi}{F_1}(\lambda+2\mu)=\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}$ verir. Böylece

$$(26) \qquad \Phi=\frac{F_1}{8\pi(\lambda+2\mu)}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_1} \quad \text{elde edilir.}$$

$\frac{\partial}{\partial x_2}$ terimden $\frac{8\pi}{F_1}\mu\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}$ olur ve

$$(27) \qquad A_3=\frac{F_1}{8\pi\mu}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_2} \quad \text{elde edilir.}$$

$\frac{\partial}{\partial x_3}$ terimden $-\frac{8\pi}{F_1}\mu\frac{\partial A_2}{\partial x_3}=\frac{\partial^2 r}{\partial x_3^3}$ olur ve

$$(28) \qquad A_2=-\frac{F_1}{8\pi\mu}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_3}$$

böylece bilinmeyenlerin tümü saptanır. Ayrıca bilinmeyenlerin saptanan değerleri kısmi diferansiyel denklemleri de sağlamaktadır.

Eğer (26), (27) ve (28) nolu değerler (19 nolu ifade $\vec{U}=\vec{\nabla}\Phi+\vec{\nabla}\times\vec{A}$ de yerine konulduğunda

$$(29) \qquad U_1=\frac{F_1}{8\pi(\lambda+2\mu)}\vec{\nabla}\frac{\partial r}{\partial x_1}+\frac{F_1}{8\pi\mu}\vec{\nabla}\times\left[-\hat{j}\frac{\partial r}{\partial x_3}+\hat{k}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right]$$

elde edilir. Halbuki $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & -\frac{\partial r}{\partial x_3} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \end{vmatrix}$ yazılabilir ve buradan

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial r}{\partial x_3}\right)+\hat{j}\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)+\hat{k}\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_3}\right)$$

Bu işlemin (29) nolu denkleme uygulanması sonucu elastik yer değiştirmeler için

$$U_{11} = \frac{F_1}{8\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} + \frac{F_1}{8\pi\mu} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2} \right]}_{\nabla^2 r - \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}}$$

yazılır. Burada U'nun altındaki ikinci indis «l» sisteme uygulnan kuvvetin i'inci yönünü belirtmek için kullanılmıştır. Böylece

$$(30) \qquad U_{11} = \frac{F_1}{8\pi\mu} \left[\nabla^2 r - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} \right]$$

olur. Benzer biçimde j'inci yönde

$$(31) \quad U_{12} = \frac{F_1}{8\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial r}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{F_1}{8\pi\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2} \text{ veya } U_{12} = \frac{F_1}{8\pi\mu} \left[-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2} \right]$$

olarak yazılır. Diğer yönlerde de benzer ifadeler yazılabilir.

Şimdi bulduğumuz sonucu bir kaynak-kuvvet $F_j \, \delta(\vec{r})$ için genelleştirelim : sistemin orijininde j'inci yönde uygulanan bir birim $(F_j = 1)$ nokta-kuvvetin meydana getirdiği $U_{ij}(\vec{r})$ yerdeğişiminin i'inci bileşeni

$$(32) \qquad U_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[\delta_{ij} \nabla^2 - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

olarak ifade edilir ki burada $U_{ij}(\vec{r})$ fonksiyonu elastik yer değiştirmeler için TENSÖR GREEN FONKSİYONU olarak tanımlanır.

(32) nolu denklem sonsuz bir yapının bir nokta-kuvvet etkisi altındaki davranışını vermektedir. Sonlu bir yapı için de benzer ifade yazılabilir, ancak yüzeydeki sınır koşullarının sağlanması zorunludur. Elastik bir ortamda kuvvetlerin $(F_j(\vec{r}))$ devamlı bir dağılımının oluşturduğu yer değiştirmeler

$$(33) \qquad U_i(\vec{r}) = \int U_{ij}(\vec{r} - \vec{r}') \, F_j(\vec{r}') \, dV'$$

olarak ifade edilir. Görüldüğü gibi (33) nolu denklem elektrostatikdeki (4) nolu Poisson denkleminin genel çözümüne benzer bir ifadedir.

Tensör Green Fonksiyon yöntemi dislokasyon teoride özellikle nokta-kaynağın yayılması ve iğri dislokasyonların meydana getirdiği yer değiştirmeler konularında uygulanabilir.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

HIRTH, J. P., LOTHE, J., 1968. Theory of Dislocations, **McGraw Hill.**

LOVE, A. E. H., 1944, The Mathematical Theory of Elasticity, **Dover Pub.**

OFFICER, C. B., 1958, Introduction to the Theory of Sound Transmission, **McGraw Hill.**

TRICOMI, F. G. 1967, Integral Equations, **Interscience Pub.**

WILLS, A. P., 1958, Vector Analysis with an Introduction to Tensor Analysis, **Dover Pub.**