

EN KÜÇÜK KARELER ÇÖZÜMLÜ BİR DENGELEME İŞLEMİ

İbrahim Aydın*

ÖZ :

Her türlü fiziki ölçme değeri niceliğin gerçek değeri ve ölçme hatası da denilebilecek keyfi hata değerinin toplamıdır. Bu ölçmeler dizisindeki bu hatalar, Gauss dağılım fonksiyonundan kalkılarak en küçük kareler tekniği ile kolaylıkla dağıtılabilir. Dengeleme uygulaması sonuçları göstermiştir ki en büyük kapantı hatası ölçme aygıtı duyarlılığı içindedir.

ABSTRACT

Every kind of physical measurement value is the sum of real value of the quantity and random error which may be named measurement error. These errors in a series of measurements can easily be distributed by using the least square technique with starting from the Gauss distribution function. Adjustment application results have shown that maximum loop error is in the instrument sensitivity.

1. GİRİŞ

Genellikle fiziki ölçümler ölçme hatası veya okuma hatası olarak bilinen hatalar içerirler ve bu yüzden kendilerini belirleyen matematik modellere uymazlar. Bu hataların giderilmesi, dağıtılması veya bütün ölçümlerin en küçük hatayı taşıması, fiziki olayı daha iyi tanımaya dolayısıyla ondan daha çok yararlanmaya yardımcı olur. Konu edilen dengeleme işlemi yöntemi, hataların dağıtılması için en basit ve hızlı çalışan bir yöntemdir. Uygulaması verilen bir gravite probleminde sonuç hata, alet duyarlılığı içinde kalmaktadır.

(*) M.T.A. Enstitüsü Jeofizik Dairesi/ANKARA

2. GENEL TEORİK BİLGİLER

2.1. Hatalar :

Ölçme hatalarını üç grupta toplayabiliriz.

Kaba (Gross) Hatalar : Ölçme, okuma veya yazma yanlışlıklarıdır. Ölçmenin veya okumanın özenle yinelenmesi ile saptanabilirler.

Sistemik Hatalar : Bu grup hataların genel karakteristiği bir kurala bağlı oluşları, düzenlilik göstermeleri ve ölçmelerin yinelenmesi ile saptanamaz oluşlarıdır. Genellikle aletin yapım hatasından, kalibrasyon hatasından veya aleti etkileyen özel koşullardan ileri gelirler. İstatistiksel ve Dengeleme işlemlerinde bu tip hataların ölçü değerleri üzerinde bir etkisinin olmaması istenir.

Keyfi (Random) Hatalar : İstatistik analizin en önemli konusunu oluştururlar. Magnitud ve cebrik işaretleri sabit değildir. Genellikle alet duyarlılığının ve okuma kabiliyetimizin sınırlı olmasından ileri gelirler.

2.2. Çok boyutlu Normal (Gauss) Dağılım Fonksiyonu :

İstatistikte normal dağılımlı nicelikler için çok boyutlu normal dağılım fonksiyonu,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{|\sigma_{xx}|^{-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \Delta x^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot \Delta x\right) \quad (2.1)$$

şeklinde verilir.

Ölçülen nicelikler (X_j), fonksiyonunun değişkenleridir.

Vektör matrix şeklinde gösterimi,

$$(x_i) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

transpose şekli ise

$(X_j) = (x_1, \dots, x_n)$ olacaktır.

x_j değerleri ölçüm değerleri olup bir hata içerirler. Her bir niceliğin, ölçülmesi istenen asıl değeri \bar{x} (expectation) içinde vektör matrix gösterimi

$$(\hat{x}_i) = E(x_i) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}$$

olacaktır.

Niceliklerin ölçülen ve ölçülmesi istenen asıl değerleri arasındaki farklar içinde vektör matrix transpose şekli

$$(\Delta x_i) = (\hat{x}_i - x_i) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$(\Delta x_i^T) = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$$

olarak gösterilebilir.

Ölçülmesi beklenen veya dengeleme işlemi ile bulunan asıl değer, o niceliğin kesinkes hatasız gerçek değeri olmayacaktır. Ancak asıl değer gerçekte en yakın değerdir ve ölçü değerinin bu değerden farkı olan ΔX , görünen hata veya düzeltme miktarı olarak tanımlanabilir.

Variance - Covariance σ_{xx} genel gösterimi

$$\sigma_{xx} = \begin{bmatrix} x_1 x_1 & \dots & x_1 x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n x_1 & \dots & x_n x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Daha idealize edilmiş şekli ise variance

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_1}^2 = E((\hat{x}_1 - x_1)^2) = E(\Delta x_1^2) = E(\Delta x_1 \cdot \Delta x_1) = \overline{\Delta x_1 \cdot \Delta x_1} \quad (2.2)$$

covariance

$$\sigma_{x_1, x_2} = E((\hat{x}_1 - x_1)(\hat{x}_2 - x_2)) = E(\Delta x_1 \Delta x_2) = \overline{\Delta x_1 \Delta x_2} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanabilir. Daha kısa bir gösterim.

$$\sigma_{XX} = E(\Delta X \Delta X^T)$$

şeklinde olacaktır.

Yukarıdaki idealize edilmiş şekli ile hataların (ΔX) çok küçük olduğu, standart hata şeklinde yorumlanabileceği ve \bar{x} değerlerinin gerçek değer şeklinde olduğu varsayımlarından gidildiği anlaşılabilir.

Variance - Covariance matrixinin her bir elementi «Variance faktörü» denilen bir sabitle bölünerek «Ağırlık Katsayıları Matrixi» elde edilir.

$$g_{XX} = \frac{1}{\sigma^2} \sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{x_1 x_1}}{\sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_{x_1 x_n}}{\sigma^2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\sigma_{x_n x_1}}{\sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_{x_n x_n}}{\sigma^2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ağırlık katsayıların matrixi, variance faktörünün bilinmemesi halinde bile dengeleme işlemlerinde kullanılabileceğinden daha çok tercih edilir. «Ağırlık Matrixi» de

«ağırlık katsayıları matrixinin inversi olacağından

$$\bar{g}_{xx}^{-1} = \sigma^2 \cdot \sigma_{xx}^{-1} \quad (2.5)$$

şeklinde yazılır.

Hemen belirtelimki variance faktörü tamamen keyfi bir değerdir, Variance - covariance matrixinin değerini değiştirmez. Her üç matrixde variance - covariance, ağırlık katsayıları ve Ağırlık matrixi daima simetriktir.

2.3. Üretilen Nicelikler :

Genellikle ölçmeler bir matematik ilişki fonksiyonunda kullanılarak, bir başka nicelik için değer üretilir.

$$(y_j) = y_j(x_1, \dots, x_n) \quad j = 1, \dots, m$$

Böyle matematik fonksiyonlarda üretilen nicelikler m tane ise bunu bir vektör matrik olarak gösterebiliriz.

$$(y_j) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

Transposu (y_j') bilindiği şekilde yazılabilir.

Matematik fonksiyonda kullanılan niceliklerin ölçme değerleri stochastic (frekans dağılım özelliğine sahip) olduğundan bu değerlerden üretilen değerde stochastic olacaktır. Bu nedenle üretilen değerlerde Normal Dağılım fonksiyonu ile temsil edilebilirler. Normal Dağılım fonksiyonundan faydalanarak üretilen niceliklerin frekans dağılım özellikleri araştırılabilir.

Üretilen nicelikler cinsinden Normal Dağılım fonksiyonu ise,

$$f(y_1, \dots, y_m) = \frac{|\sigma_{yy}|^{-m/2}}{(2\pi)^{m/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (y^T - \hat{y}^T) \cdot \sigma_{yy}^{-1} \cdot (y - \hat{y})\right) \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Aranan parametreler

$\bar{y} = E(y)$, asıl değer (veya düzeltilmiş-dengelenmiş değer)

σ_{yy} , üretilen değerler için variance-covariance.

Matematik ilişki fonksiyonu lineer ise

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1^0 \\ \vdots \\ u_m^0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

şeklinde, kısa bir gösterimle

$$(y_j) = u x_j + u^0 \quad (2.8)$$

u^0 , sabitler

yazılabilir

Aynı ilişki asıl değerler cinsinden

$$\bar{y}_j = u \bar{x}_j + u^0 \quad (2.9)$$

olarak yazılacaktır.

(2.8) ve (2.9) eşitliklerinin bir birinden çıkarılması ile

$$\bar{y} - y = u \bar{x} - u x = u (\bar{x} - x)$$

$$\bar{y} - y = \Delta y$$

$$\bar{x} - x = \Delta x$$

olduğundan

$$\Delta y = u \cdot \Delta x \quad (2.10)$$

bulunur.

Son bulan (2.10) eşitliğine Hata Dağılım Kuralı Eşitliği denir.

Diğer bir aradığımız parametre üretilen değerler için variance-covariance σ_{yy} dir.

matematik ilişki fonksiyonunları giderek

$y_i = u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 \dots \dots u_{in}x_n + u_i^0$ yazıp hata dağılımı kuralı uygulanırsa

$$\Delta y_i = u_{i1}\Delta x_1 + u_{i2}\Delta x_2 \dots \dots u_{in}\Delta x_n \quad (2.11)$$

eşitliği bulunur.

Daha önce ölçülennicelikler için yapılan varsayım (2.2), (2.3), buradada geçerli olacağından variance için

$$\sigma_{y_i y_i} = E(\Delta y_i \cdot \Delta y_i^T) = \overline{\Delta y_i \Delta y_i}$$

(2.11) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\sigma_{y_i y_i} = (u_{i1}\Delta x_1 + u_{i2}\Delta x_2 \dots \dots u_{in}\Delta x_n)^2 \quad (2.12)$$

yazılabilir.

Covariance içinde

$$\sigma_{y_1 y_2} = \Delta y_1 \Delta y_2 = (u_{11}\Delta x_1 + u_{12}\Delta x_2 \dots \dots u_{1n}\Delta x_n)(u_{21}\Delta x_1 + u_{22}\Delta x_2 \dots \dots u_{2n}\Delta x_n) \quad (2.13)$$

yazılabilir.

(2.2) ve (2.3) eşitlikleri

(2.12) ve (2.13) eşitliklerinde yerlerine konursa,

$\frac{\Delta x_i \cdot \Delta x_i}{\Delta x_i \Delta x_j}$ ile $\sigma_{x_i x_i}$
 $\Delta x_i \Delta x_j$ ile $\sigma_{x_i x_j}$ yer değiştirebilir.

sonuçta

$$\sigma_{yy} = U \cdot \sigma_{xx} U^T \quad (2.14)$$

bulacağız .

Ölçülen nicelikler ile üretilen nicelikler arasındaki matematik ilişki fonksiyonu lineer olmayabilir. Bu takdirde, izlenecek yol aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\Delta x_i = \bar{x}_i - x_i$$

$$\Delta y_i = \bar{y}_i - y_i$$

den

$$\bar{x}_i = x_i + \Delta x_i$$

$$\bar{y}_i = y_i + \Delta y_i \text{ olacağından } \bar{y}_i \text{ genel gösterimle}$$

\hat{y}_j genel gösterimle

$$(\hat{y}_j) = y_j (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$$

$$(y_j + \Delta y_j) = y_j ((x_1 + \Delta x_1) + \dots + (x_n + \Delta x_n)) \quad (2.15)$$

yazılabilir.

Δx hatalarının y_j üzerindeki etkisinin fonksiyonel bağıntısı bulunmalıdır.

(2.15) bağıntısına Taylor açılımı uygulanıp, ikinci ve daha yüksek mertebedeki terimlerin çok küçük olmaları nedeniyle atılmaları halinde,

$$(y_j + \Delta y_j) = y_j(x_i) + \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \Delta x_i \right) \quad (2.16)$$

yazılabilir.

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_1} = u_{j1}, \quad \frac{\partial y_j}{\partial x_2} = u_{j2}, \quad \dots \quad \frac{\partial y_j}{\partial x_n} = u_{jn} \quad (2.1)$$

konarak (2.16) eşitliği

$$(\hat{y}_j) = (y_j + \Delta y_j) = y_j(x_1 + \dots + x_n) + (u_{j1} + \dots + u_{jn}) \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

halini alır. Buradaki (u.)nün daha genel gösterimi

$$u_{ji} = \begin{bmatrix} u_{j1} & \dots & u_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır.

(2.5) eşitliği (2.17) eşitliğinden çıkartılırsa

$$(\Delta y_j) = [u_{j1}, \dots, u_{jn}] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

bulunur ve kısa bir gösterimle

$$\Delta y = u \cdot \Delta x \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik yine Hata Dağılımı Kuralı eşitliğidir. Tek fark (u_{ji}) değerleri (y_j) eşitliğinin alınarak bulunmuş olmasıdır. Yine buradan daha önce bulduğumuz (2.14) deki gibi variance-covariance eşitliğine geçebiliriz.

$$\sigma_{yy} = u \cdot \sigma_{xx} \cdot u^T \quad (2.20)$$

2.4. En Küçük Kareler Çözümü İçin Gerekli Matematik İlişkiler.

Eğer n tane, ölçümü yapılan niceliğimiz ve üretilecek niceliğimiz varsa, birbirinden bağımsız n tane matematik ilişki fonksiyonu kurulabilir. Üretilen nicelikler cinsinden

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

ölçülen nicelikler cinsinden

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ x_n(y_1, \dots, y_m) \end{bmatrix}$$

her ikisininde kısaca gösterimi

$$(y_j) = y_j(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad (x_i) = x_i(y_1, \dots, y_m)$$

şeklinde yazılabilir.

Hata dağılımı kuralına göre,

$$\Delta y = D \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = C \cdot \Delta y \quad \text{dir.}$$

(2.21)

Burada

$$D_{ij} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \quad , \quad C_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

olup (2.21) deki eşitlikler.

$$\Delta y = D \cdot \Delta x = D \cdot C \cdot \Delta y$$

$$\Delta x = C \cdot \Delta y = C \cdot D \cdot \Delta x$$

şeklinde dönüşürler. Yukarıda eşitliklerdende anlaşılacağı gibi

C.D = I birim matrix

D.C = I birim matrix dir.

Dengeleme işlemlerinde üretilen nicelikler (y_j) iki guruba ayrılırlar.

$$y_j = \begin{bmatrix} y_a \\ \vdots \\ t_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ t_p(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \alpha = 1 \dots m & m < n \\ \rho = 1 \dots b & n - m = b \end{array} \quad (2.22)$$

t_p değerleri bilinen değerlerdir ve oluşturdukları eşitliklere Koşul Eşitlikleri denir. y_j 'lar ise bilinmeyen, üretilecek niceliklerin değerleridir.

Yine hata dağılım kuralından

$$\begin{aligned} \Delta y &= U \cdot \Delta x \\ \Delta t &= U \cdot \Delta x \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$(t_p) = (t_p(x_1 \dots x_n))$$

eşitliğinde ölçme değerleri (x_i) hata içerdiklerinden üretilen t_p değeri, değeri bilinen t_p değerinden farklı olacaktır.

$$\bar{t} - t = \Delta t \quad (2.24)$$

Δt çok küçük ve sonuç olarak yine bilinen bir değerdir.

Düzeltilmiş ölçme değerinin (\bar{x}) aradığımız asıl değeri (\bar{x}) olduğu varsayımından,

$$\bar{x} = E(\bar{x})$$

ve düzeltilmiş ölçme değerlerinden bulacağımız (T) değerinin bilinen gerçek \bar{t} değeri olarak kabul edilebileceği,

$$T = \bar{t} = 0$$

Ayrıca düzeltme miktarı $\bar{\Delta} \bar{X}$ in aranan ve giderilmesine çalışılan hata ΔX 'e eşit olabileceği yorumunda

$$\Delta X = E(\bar{\Delta} \bar{X})$$

gidilirse,

$$\bar{X} = X + \bar{\Delta} \bar{X} \quad (2.25)$$

ve

$$\bar{t} = T = T(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) = 0$$

eşitlikleri yazılabilirki koşul eşitlikleri sağlansın.

Yukarıdaki bütün kabul ve varsayımlardan sonra çok boyut normal dağılım fonksiyonu, düzeltilmiş ölçme değerleri cinsinden yazılabilir.

$$g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \frac{|\sigma_{xx}|^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \bar{\Delta} X^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot \bar{\Delta} X\right) \quad (2.26)$$

İstedığımız düzeltilmiş ölçme değerleri (\bar{X}) koşul eşitliğini sağlasın ve düzeltme miktarları ($\bar{\Delta} \bar{X}$) (2.26) eşitliğini maksimuma götürsün. Eski işareti nedeniyle (2.26) eşitliğinin exponent kısmının minimum olması o eşitliğin maksimum olması demek olacaktır. Matematik ifadesi ile

$$\begin{aligned} T &:: \bar{t} = 0 && \text{ve} \\ \bar{X}^T \cdot \sigma_{xx}^{-1} \cdot \bar{\Delta} \bar{X} &\rightarrow \text{minimum} \\ &\text{olmalıdır.} \\ \bar{t} &:: t(x_1, \dots, x_n) \\ T &:: T(x_1, \dots, x_n) \\ \bar{X} &:: X + \bar{\Delta} \bar{X} \end{aligned}$$

$$\Delta T = T - t = U \Delta x$$

$$U p_i = \frac{\partial t_p}{\partial x_i}$$

$T = 0$ olduğu koşulundan

$$U \cdot \Delta x = T - t$$

$$U \Delta x = 0 - t$$

bulacağız.

$$\bar{g}_{xx}^{-1} = \sigma^2 \cdot \sigma_{xx}^{-1} \quad \text{oluğundan.}$$

$$\bar{\Delta x}^T \cdot \bar{g}_{xx}^{-1} \cdot \bar{\Delta x} \rightarrow \text{minimum olurken} \quad (2.27)$$

$$U \cdot \bar{\Delta x} + t = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

2.5. En Küçük Kareler Çözümünün Standart Problem — 1 e Uygulaması

(2.27) deki iki eşitlik birer fonksiyon şeklinde gösterilirse.

$$f_1 = \bar{\Delta x}^T \cdot \bar{g}_{xx}^{-1} \cdot \bar{\Delta x} \rightarrow \min.$$

$$f_2 = k^T (U \bar{\Delta x} + t) = 0$$

olacaktır.

Burada

$$K^t = (k_1 \dots k_b) \quad b, \text{ koşul eşitliği sayısı}$$

olup k 'lara Lagrange çarpanları denir ve her iki fonksiyonu tek bir fonksiyon şeklinde ifade edilebilir. Buradaki k 'lar sabit değerlerdir.

$$f = f_1 - 2 f_2$$

Grafikte gösterebilmek için

Fonksiyonlarımızı iki boyutlu olarak alır ve

$$\bar{g}_{xx}^{-1} = I \quad \text{kabul edersek}$$

$$f_1 = \bar{\Delta}x_1^2 + \Delta x_2^2 \quad \text{bir paraboloid}$$

$$f_2 = k^T (u_1 \bar{\Delta}x_1 + u_2 \Delta x_2 + t) \quad \text{bir düzlem olacaktır.}$$

Paraboloid ve düzlemin kesişmesinden meydana gelecek parabolun minimum noktasının koordinatları aradığımız $\Delta \times_1$ ve $\Delta \times_2$ değerleridir.

Konu tekrar genel olarak ele alıp devam edilirse

$$\bar{f} = f_1 - 2f_2 = \bar{\Delta}x^T \bar{g}_{xx}^{-1} \bar{\Delta}x - 2k^T (u \bar{\Delta}x + t)$$

olarak yazılabilir.

f fonksiyonunun minimum yapan $\Delta \times$ değişkenlerini bulmak için

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta_i} = 0 \quad i = 1 \dots n$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta x_i} = \bar{g}_{xx}^{-1} \cdot \bar{\Delta}x + (\bar{\Delta}x^T \bar{g}_{xx}^{-1})^T - 2(k^T u)^T = 0$$

$$= 2 \bar{g}_{xx}^{-1} \cdot \bar{\Delta}x - 2u^T \cdot k = 0$$

eşitliğinden $\bar{\Delta}x$ 'i çekersek

$$\bar{\Delta}x = g_{xx} u^T \cdot k \quad (2.28)$$

k bilinmeyen bir vektördür, bunun bilinenler cinsinden çözülmesi için

(2.28) eşitliğinin iki tarafının U ile ön çarpımından

$$U. \bar{\Delta} \bar{X} = U. g_{xx} U^t. k \quad (2.29)$$

bulunur.

(2.27) eşitliğinden

$$U. \bar{\Delta} \bar{X} = -t$$

olduğu biliniyor. (2.29) eşitliği buna göre düzenlenirse

$$U. g_{xx} U^t. k = -t$$

bulunur.

$$U. g_{xx} U^t = g_{tt} \quad (2.30)$$

olarak

$$k = -g_{tt}^{-1}. t \quad (3.31)$$

k bilinenler cinsinden çözülmüş olur.

(2.31) eşitliğinin (2.28) eşitliğinde yerine konması ile

$$\bar{\Delta} \bar{X} = -g_{xx} U^t. g_{tt}^{-1}. t \quad (2.32)$$

Düzeltilme miktarları bulunmuş olur.

Düzeltilmiş değerlerde

$$\bar{X} = X + \Delta X \quad (2.33)$$

eşitliğinden bulunabilir.

Düzeltilmiş ölçmeler için ağırlık katsayıları matrixi

$$g_{xx}^- = g_{xx} - g_{xx} U^t. g_{tt}^{-1}. U. g_{xx} \quad (2.34)$$

şeklinde verilebilir.

Dengeleme işlerinden önce üretilen değerler için ağırlık katsayıları matrixi (2.14) veya (2.20) eşitlikleri ile verilirken, dengeleme işleminden sonra bu matrix

$$g_{yy} = V. g_{xx}^- V^t \quad (2.35)$$

şekline dönüşür.

3. BİR UYGULAMA :

Şekil - 1 de görülen gravite baz şebekesinde 1 ve 2 nolu noktalarda okunma değerleri hatanın, problemi basitleştirmek amacıyla diğer bütün noktalardaki ölçme değerleri (her türlü gravimetrik düzeltmeden sonra) aynı miktarda okuma hatası içerdiği (Variance-Covariance matrixi birim matrix) var sayılmıştır.

1, 2. ve 3 nolu kapantı (Loop) larda kapantı hatası 0.00 olduğu halde 4no'lu kapantıda hata 0,30 düzeyindedir.

Dengeleme işlemi sonunda bütün kapantılarda hata 0.01 düzeyine indirgenmiştir.

Gerçekte Variance-Covariance matrixi noktalar arasındaki uzaklık ve ölçüm değeri değişim miktarı göz önüne alınarak düzenlenmelidir.

4. YARARLANILAN KAYNAKLAR

Molenar, M., 1977, Statistics : ITC, The Netherlands.

———, Adjustment - 1 : ITC, The Netherlands.

Parrat, L.G., 1961, Probability and experimental errors in Science : John Wiley and Sons.

Ulusoy, E., 1963, Dengeleme hesabı : Teknik Okul Yayınları, İstanbul.