

ENİNE YÖN BAĞIMSIZ ORTAMDA DALGA YAYILIMI

Wave Propagation in Transversely Isotropic Media

Selma KADIOĞLU¹

ÖZET

Bu çalışmada, iki boyutlu enine yön bağımsız bir ortamda (EY ortam; transversely isotropic media; TI medium) dalga yayılımı irdelenmiştir. Önce EY ortam tanımlanmış sonra iki boyutlu ortam için hareket denklemleri çıkartılmıştır. Dalga yayılımının hesaplanması için sayısal hesaplama yöntemi geliştirilmiştir. Hız ve dalga cephesi eğrileri için temel yaklaşımlar incelenmiştir. Son olarak geliştirilen hesaplama yöntemi ile EY ortamda dalga yayılımı hesaplanmasının yapıldığı iki uygulama sunulmuştur.

ABSTRACT

In this study, wave propagation has been considered in two-dimensional transversely isotropic media (TI media). Firstly, transversely isotropic media has been defined. Then equations of motion for two-dimensional case have been derived. A numerical algorithm has been developed for computation of the wave propagation. Some basic concepts about velocity and wave front curves have been reviewed. Finally two applications of the numerical computation of the wave propagation in transversely isotropic media have been presented.

GİRİŞ

Yön bağımlı (anisotropic) ortam, hızın yayılma yönüyle değişmesi olarak tanımlanır. Yön bağımlı ortamlar birkaç çeşit simetriye sahip olabilirler. Simetriklik özelliklerine göre yön bağımlı ortamların herbiri farklı dalga yayılımı karakterine sahiptirler (Fagin, 1998; Helbig, 1994). Bunlardan en yaygın olanı enine yön bağımsız ortamdır (EY ortam; transversely isotropic media; TI media). EY ortam bir simetri eksenine sahiptir. Bu simetriklik bir eksen etrafında koordinat ekseninin rotasyonu durumunda elastik katsayıların değişmemesi anlamındadır (Helbig, 1994).

Bir EY ortamın tanımlanması için c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} ve c_{44} olmak üzere beş adet elastisite katsayısının tanımlanması gerekmektedir (Payton, 1983). Yine bu standart gösterime alternatif bir gösterim Thomsen (1986) tarafından geliştirilmiş ve "Thomsen yön bağımlı (anisotropi) parametreleri" olarak adlandırılmıştır. Bunlar sırasıyla düşey P ve S dalgalarının hızları α , β , SH dalga hızını belirleyen γ ve anizotropi parametreleri ϵ , δ (Thomsen, 1986) dir.

¹ Ankara Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Jeofizik Mühendisliği Bölümü, 06100 Tandoğan / ANKARA
Fax: 0 312 215 04 87 e-mail: kadioglu@eng.ankara.edu.tr

Bu çalışmada EY ortamda dalga yayılımı irdelenmiştir. Bunun için sayısal hesaplama yöntemi geliştirilmiştir. Uygulama olarak Thomsen (1986)' dan elastisite katsayıları alınan iki örnek için hız ve dalga cephesi eğrileri ve yerdeğıştirme bileşenleri hesaplanıp bir t zamanındaki durumu görüntülenmiştir.

ENİNE YÖN BAĞIMSIZ (EY) ORTAMIN TANIMLANMASI

Tekdüze olmayan (heterogen), yön bağımlı (anisotropic) bir ortam genelleştirilmiş Hook kanunu ile tanımlanır:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Burada $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ ve $e_{kl}(\mathbf{x}, t)$ sırasıyla gerilme (stress) ve yamulma (strain) tansörleridir, $c_{ijkl}(\mathbf{x})$ dördüncü düzen tansör bileşenleri, ortamın elastisiteleri olarak tanımlanır. \mathbf{x} konum vektörünü, t ise zamanı tanımlar.

EY ortamda gerilme-yamulma ilişkisini elde etmek için burada literatürde ortak kullanılan kısaltılmış matris gösterimi kullanılmaktadır. Buna göre elastisiteyi tanımlayan alt indis çifti uygun bir düzenele

$$\begin{aligned} (11) \rightarrow 1, (22) \rightarrow 2, (33) \rightarrow 3, (23) = \\ (32) \rightarrow 4, (31) = (13) \rightarrow 5, (12) = (21) \rightarrow 6, \end{aligned} \quad (2)$$

şeklinde tek bir sayı ile tanımlanır. Bu gösterimi kullanarak simetri eksenini z eksenini olan EY katıda gerilme-yamulma ilişkisi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

olarak verilir (Thomsen, 1986; Payton, 1983). Burada $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$ dir. Bu bağıntı (3) denklemindeki beş bağımsız elastisite katsayısının uzaya bağımlı olabileceğini göstermektedir.

İKİ BOYUTLU EY ORTAMDA HAREKET DENKLEMLERİ

Yatay eksen x ve düşey eksen z olarak tanımlandığında iki boyutlu gerilme-yamulma ilişkisi

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{zz} \\ 2e_{xz} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

olarak bulunur. Burada iki boyutlu EY ortam için bağımsız elastisite katsayısı sayısının dörde indiği görülmektedir.

Dalga yayılımı, gerilme-yamulma ilişkisine bağlı olan momentum korunumuna dayanmaktadır. Sürekli bir ortamda doğrusallaştırılmış hareket denklemi

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}, \quad (5)$$

ile tanımlanır. Burada $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ yerdeğıştirme alanının zamana göre ikinci türevini, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ gerilme tansörünü, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ cisim kuvvetlerini, $\rho(\mathbf{x})$ yoğunluğu ve \mathbf{x} konum vektörünü tanımlamaktadır. İki boyutlu durumda (5) denklemi

$$\rho \ddot{u}_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x, \quad (6.a)$$

$$\rho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z, \quad (6.b)$$

olur. Burada \ddot{u}_x ve \ddot{u}_z yer değıştirme alanı bileşenlerinin zamana göre ikinci türevleri, f_x ve f_z cisim kuvveti bileşenleridir. Yine iki boyutlu ortamda yamulma-yer değıştirme ilişkisini (Lay ve Wallace, 1995) veren

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (7)$$

ifadesi kullanılarak sırasıyla

$$\rho \ddot{u}_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(c_{44} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right) + f_x, \quad (8.a)$$

$$\rho \ddot{u}_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(c_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(c_{44} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right) + f_z, \quad (8.b)$$

elde edilir. (8) denklemleri yön bağımsız (isotrop) ortam için tanımlandığında $c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu$, $c_{13} = \lambda$ ve $c_{44} = \mu$ olur (Thomsen, 1986). Burada λ ve μ lame sabitleridir.

Sayısal çözüm için, bu denklemler

$$\dot{U} = MU + F, \quad (9)$$

şeklinde birinci düzen denklem çiftine dönüştürülebilir.

Burada

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_{31} & M_{32} & 0 & 0 \\ M_{41} & M_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

ile tanımlanan özel işleç (operator) matrisidir. M bileşenleri ise

$$M_{31} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} c_{11} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} c_{44} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (11.a)$$

$$M_{32} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} c_{13} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} c_{44} \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (11.b)$$

$$M_{41} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} c_{44} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} c_{13} \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (11.c)$$

$$M_{42} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} c_{44} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} c_{33} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (11.d)$$

dir. Yerdeğiştirme ve cisim kuvvet dizileri ise

$$U^T = [u_x, u_z, \dot{u}_x, \dot{u}_z], \quad (12)$$

$$F^T = [0, 0, f_x/\rho, f_z/\rho], \quad (13)$$

ile tanımlanabilir. Ek A' da işleç matrisinin tekil değerlerinin bulunuşu verilmektedir.

HIZ EĞRİSİ

EY ortam için normal eğri bileşenleri

$$p = R \pm (\theta) \cos \theta \quad \text{ve} \quad q = R \pm (\theta) \sin \theta, \quad (14)$$

ile tanımlanmaktadır (Payton, 1983). Burada

$$R \pm (\theta) = \left(\frac{B(\theta) \pm B^2(\theta) - 4A(\theta)^{1/2}}{2A(\theta)} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

ve

$$A(\theta) = \alpha \cos \theta + \gamma \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \beta \sin^4 \theta, \quad (16.a)$$

$$B(\theta) = (\alpha + 1) \cos^2 \theta + (\beta + 1) \sin^2 \theta, \quad (16.b)$$

dir (Payton, 1983). Burada θ ışının yayılma açısıdır.

(16) denklemlerindeki α , β ve γ sırasıyla

$$\alpha = c_{33}/c_{44}, \quad (17.a)$$

$$\beta = c_{11}/c_{44}, \quad (17.b)$$

ve

$$\gamma = 1 + \alpha\beta - (c_{13}/c_{44} + 1)^2, \quad (17.c)$$

dir. Hız eğrisi, normal eğrinin tersi olarak tanımlanır ve bileşenleri

$$V_x \pm = V \pm (\theta) \sin \theta, \quad (18.a)$$

$$V_z \pm = V \pm (\theta) \cos \theta, \quad (18.b)$$

denklemleri ile tanımlanmaktadır (Payton, 1983). Burada

$$V \pm (\theta) = \frac{V_s}{R \pm (\theta)}, \quad (19)$$

ve

$$V_s = (c_{44}/\rho)^{1/2}, \quad (20)$$

dir. V_s , düşey ve yatay tam (pure) enine (transverse) dalga hızına uygun, EY ortamın referans dalga hızıdır (Postma, 1955).

Hız eğrileri (18) denklemlerinden de anlaşılacağı gibi iki bölümden oluşmaktadır ve

$$V_+(\theta) < V_-(\theta), \quad (21)$$

dir. (Payton, 1983). Eksi işaret ile tanımlanmış hız eğrisi quasi-boyuna kipi (quasi-longitudinal mod), Artı işaretlisi ise quasi-enine kipi (quasi-transverse mod) tanımlanmaktadır. Bu kiplere uygun yerdeğiştirme genlikleri her zaman ortogonaldir. Ancak yönbağımsız katıdaki gibi dalga cephesi ile eşleşmiş veya dik değildir. Sismolojide bu kipler P ve SV dalga cephelerini temsil etmektedirler. Fakat gerçekte dalgalar sadece enine yön bağımsız katının simetri eksenini $V_p = (c_{33}/\rho)^{1/2}$ ile birleştiğinde veya yayılma yönü $V_p = (c_{11}/\rho)^{1/2}$, ye dik olduğunda tam makaslama (pure shear) veya tam basınç (pure compressional) dalgalarıdır (Postma, 1955).

DALGA CEPHESİ EĞRİSİ

Dalga cephesi eğrisi, verilen bir t zamanında düzlem dalgaların zarflanması ile oluşturulur ve

$$z \pm = \frac{V \pm t \cos \theta}{2A} \left(2\alpha \cos^2 \theta + \gamma \sin^2 \theta \pm \frac{\sin^2 \theta (k_1 \cos^2 \theta - k_2 \sin^2 \theta)}{(B^2 - 4A)^{1/2}} \right), \quad (22.a)$$

$$x \pm = \frac{V \pm t \sin \theta}{2A} \left(2\beta \sin^2 \theta + \gamma \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta (k_1 \cos^2 \theta - k_2 \sin^2 \theta)}{(B^2 - 4A)^{1/2}} \right), \quad (22.b)$$

şeklinde iki bölümden oluşur (Payton, 1983). Burada

$$k_1 = 2\alpha(\beta + 1) + \gamma(\alpha + 1) \text{ ve}$$

$$k_2 = 2\beta(\alpha + 1) - \gamma(\beta + 1)$$

Enine yön bağımsız materyallerde normal ve dalga cephesi eğrileri büküm noktalarının yerine göre veya eğrilerin teğetlerinin birleştiği yere göre sınıflandırılırlar (Payton, 1983).

Hız ve dalga cepheleri arasında basit bir uyum yoktur. Burada $V \pm$ hızı, $k(\theta)$ dalga cephesi eğrisine normal olan dalga sayısı vektörü boyunca dalga cephesinin ilerleme hızını tespit etmektedir. Bu eğri üzerinde verilen bir $P(x_0, z_0)$ nokta için hız eğrisini kesen ve k vektörü yönüne paralel orjinden geçen bir hat boyunca uygun $Q(v_{x_0}, v_{z_0})$ noktası bulunur (Postma, 1955).

UYGULAMALAR

Burada Thomsen (1986)' in farklı çalışmalarından alıp derlediği çeşitli yerlerdeki sedimanter kayalara ait ölçülmüş yön bağımlılık (anisotropik) özellikleri tablosundan seçilen Mesaverde killi şeyl ve Mesaverde kalkerli kumtaşı kullanılmıştır. Uygulamalarda bu iki materyale ait hız eğrileri, dalga cephesi eğrileri ve belli bir t zamanı için sismik dalga yayılımı hesaplanmış ve sonuçlar görüntülenmiştir.

Hesaplamalar için ortam 165×165 lik bir alanda ve grid aralığı $DX = DZ = 20m$ olarak tanımlanmıştır. Hareket z yönünde, tanımlanan alanın merkezinde, bir nokta kaynak tarafından oluşturulmuştur. Kaynak fonksiyonu

$$S(t) = e^{-0.5f_0^2(t-t_0)^2} \cos \pi f_0(t-t_0), \quad (23)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $f_0 = 50Hz$ ve kaynak gecikme zamanı $t_0 = 60msn$ dir.

Elastisite katsayıları; basınç ve düşey makaslama hızları sırasıyla α_0 , β_0 , yoğunluk ρ , yön bağımlılık değiştirgen (parameter) değerleri ε ve δ Thomsen (1986) tarafından yayınlanmış verilerden yararlanılarak hesaplanmıştır. Buna göre Mesaverde killi şeyl için $\alpha_0 = 3794m/s$, $\beta_0 = 2074m/s$, $\varepsilon = 0.189$, $\delta = 0.204$ ve $\rho = 2.560 g/cm^3$ dir. Yine Mesaverde kalkerli kumtaşı için $\alpha_0 = 5460m/s$, $\beta_0 = 3219m/s$, $\varepsilon = 0.000$, $\delta = -0.264$ ve $\rho = 2.690 g/cm^3$ dir.

Elastisite katsayıları

$$c_{33} = \alpha_0^2 \rho, \quad (24.a)$$

$$c_{44} = \beta_0^2 \rho, \quad (24.b)$$

$$c_{11} = c_{33}(2\varepsilon + 1), \quad (24.c)$$

ve

$$c_{13} = \left(2\delta c_{33}(c_{33} - c_{44}) + (c_{33} - c_{44})^2\right)^{1/2} - c_{44}, \quad (24.d)$$

bağıntıları yardımıyla hesaplanır. Mesaverde killi şeyl için

$$c_{11} = 66.6GPa, \quad c_{13} = 39.4GPa, \quad c_{33} = 39.9GPa \quad \text{ve} \\ c_{44} = 10.9GPa$$

olarak bulunur. Mesaverde kalkerli kumtaşı için ise

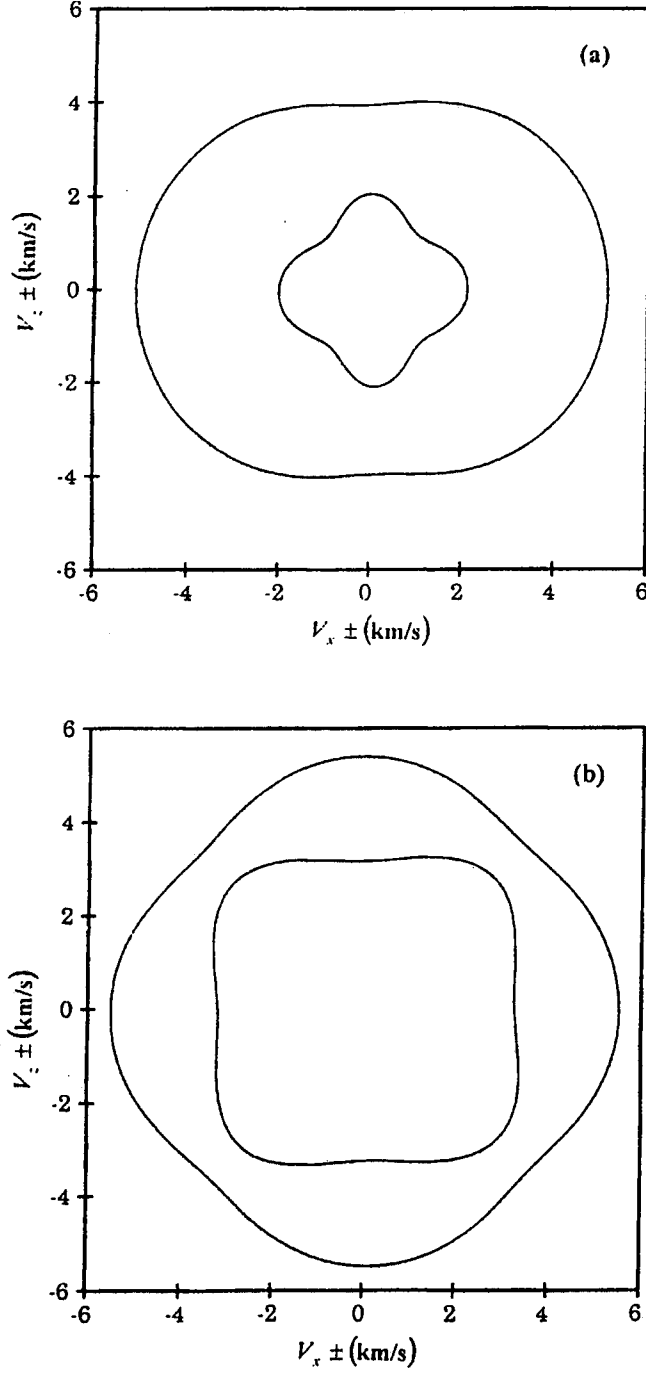
$$c_{11} = 80.2GPa, \quad c_{13} = -5.0GPa, \quad c_{33} = 80.2GPa \quad \text{ve} \\ c_{44} = 27.9GPa$$

olarak bulunur.

Şekil 1. sırasıyla Mesaverde killi şeyl'e ve Mesaverde kalkerli kumtaşı' na ait hız eğrilerini göstermektedir.

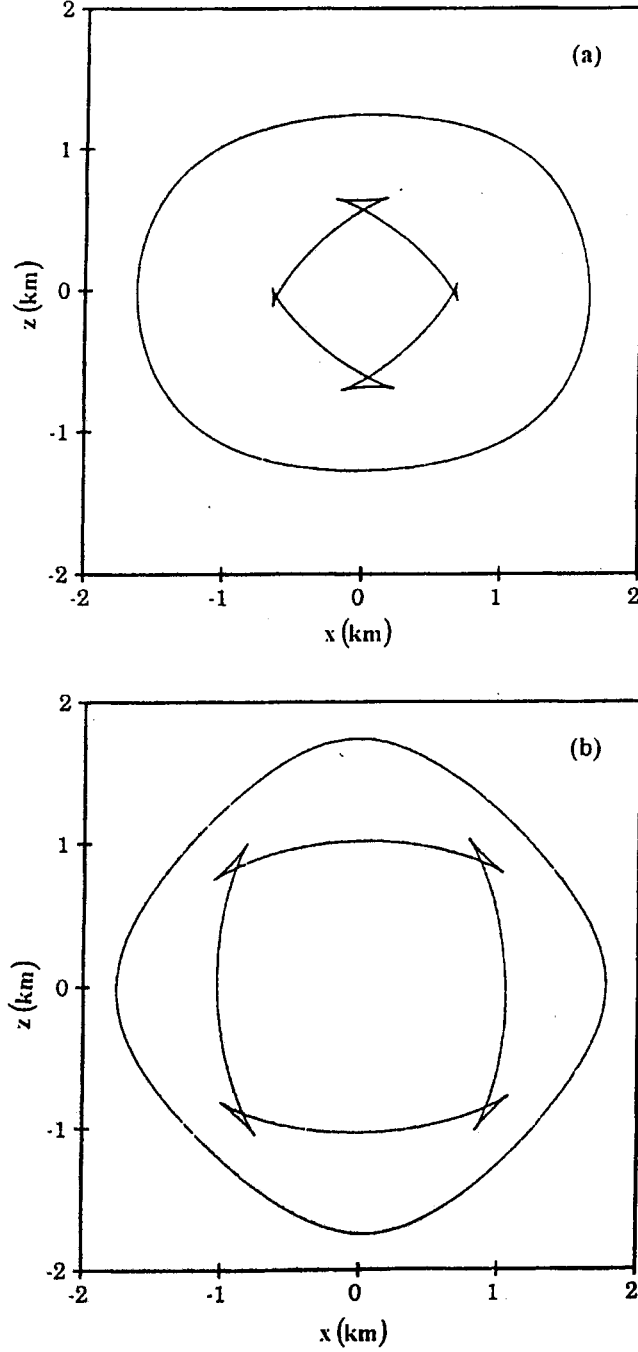
Şekil 2. sırasıyla Mesaverde killi şeyl'e ve Mesaverde kalkerli kumtaşı' na ait dalga cephesi eğrilerini göstermektedir.

Şekil 3. Mesaverde killi şeyl ve Mesaverde kalkerli kumtaşı için düşey bir kuvvetten dolayı u_x yatay yerdeğiştirme bileşeninin $t = 0.32s$ 'deki durumunu görüntülemektedir. Yine Şekil 4. Mesaverde killi şeyl ve Mesaverde kalkerli kumtaşı için düşey bir kuvvetten dolayı u_z düşey yerdeğiştirme bileşeninin $t = 0.32s$ 'deki durumunu görüntülemektedir.



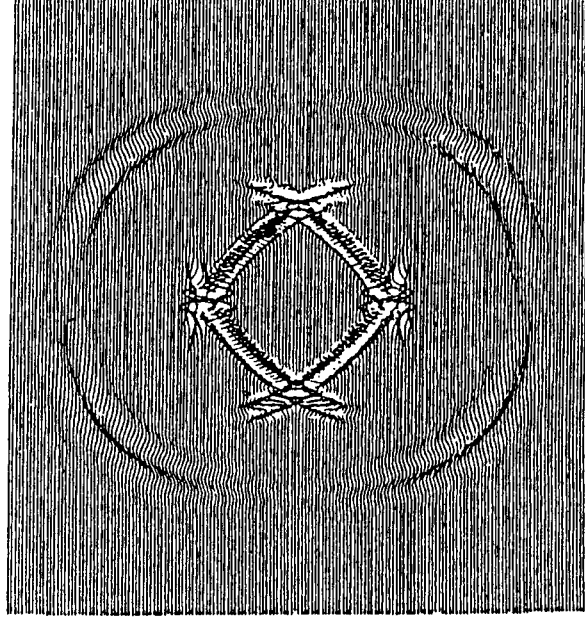
Şekil 1. Hız eğrileri ($t = 0.32s$ için). a) Mesaverde killi şeyl. b) Mesaverde kalkerli kumtaşı. İçteki eğri yaklaşık enine kipi, dıştaki eğri yaklaşık boyuna kipi göstermektedir.

Figure 1. Velocity curves (for $t = 0.32s$). a) Shale with clay in Mesaver b) Sandstone with calcerous in Mesaver. Inside of the curve displays approximate transverse modal, outside of the curve displays approximate steadily modal.

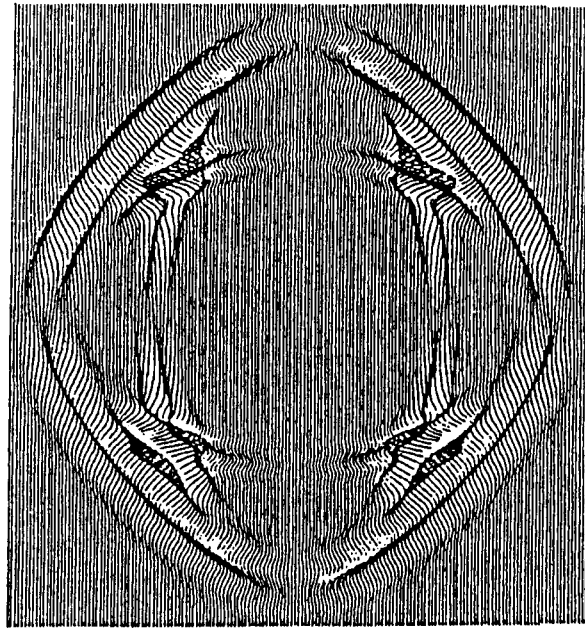


Şekil 2. Dalga cephesi eğrileri ($t = 0.32s$ için). a) Mesaverde killi şeyl. b) Mesaverde kalkerli kumtaşı. İçteki eğri yaklaşık enine kipi, dıştaki eğri yaklaşık boyuna kipi göstermektedir.

Figure 2. Wavefront curves (for $t = 0.32s$). a) Shale with clay in Mesaver b) Sandstone with calcereous in Mesaver. Inside of the curve displays approximate transverse modal, outside of the curve displays approximate steadily modal.



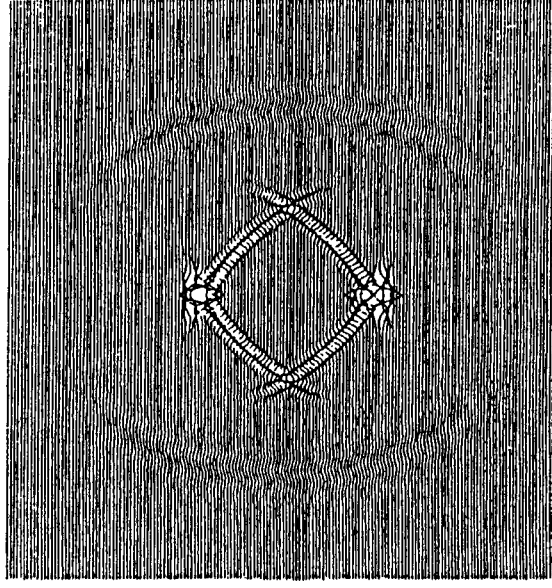
(a)



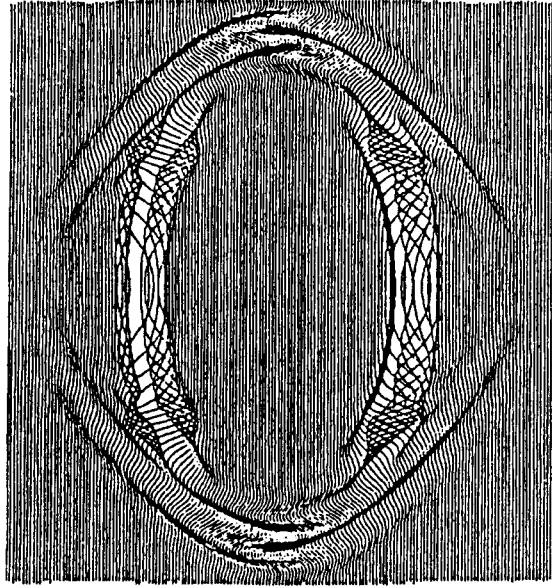
(b)

Şekil 3. Düşey kuvvetin meydana getirdiği yerdeğiştirme alanının $t = 0.32s$ ' de u_x yatay bileşeni a) Mesaverde killi şeyl. b) Mesaverde kalkerli kumtaşı.

Figure 3. The vertical force that composes the horizontal component of U_x in $t = 0.32s$ a) Shale with clay in Mesaver b) Sandstone with calcereous in Mesaver.



(a)



(b)

Şekil 4. Düşey kuvvetin meydana getirdiği yerdeğiştirme alanının $t = 0.32s$ ' de u_z düşey bileşeni a) Mesaverde killi şeyl. b) Mesaverde kalkerli kumtaşı.

Figure 4. The vertical force that composes the vertical component of u_z in $t=0.32$ s a) Shale with clay in Mesaver b) Sandstone with calcereous in Mesaver.

SONUÇLAR

Bu çalışmada iki boyutlu enine yön bağımsız bir ortamda dalga yayılımı hesaplamaları üzerinde duruldu. Hesaplanan dalga cepheleri göreceli dalga cepheleri tarafından üretilmiş karakteristikleri gösterdi. Burada kullanılan sayısal hesaplama analitik çözümler çok karmaşık olduğu veya bilinmediği zaman elastodinamik çözümleri kararlaştırmada çok önemli olabilir. Bu sayısal hesaplama yöntemi farklı simetriye sahip materyaller için dalga yayılımı hesaplamalarına kolaylıkla dönüştürülebilir.

TEŞEKKÜR

Çalışmanın bir kısmı Ankara Üniversitesi Yurtdışı Araştırma-Eğitim Bursu ile gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından YDABÇAG-100Y105 Nolu Proje kapsamında desteklenmektedir. Katkılarından dolayı Ankara Üniversitesi'ne ve TÜBİTAK'a çok teşekkür ederim.

Bilimsel yardımlarından dolayı sayın Prof. Dan KOSLOFF'a (Tel-Aviv Üniversitesi/İSRİL) çok teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

- Fagin, S., 1998. Model-Based Imaging. Course Notes Series, No. 10, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma USA.
- Helbig, K., 1994. Foundations of Anisotropy for Exploration Seismics. Handbook of Geophysical Exploration Sections. Vol. 22.

- Lay, T. and Wallace, T. C., 1995. Modern Global Seismology. International Geophysical series, 58.
- Payton, R. G., 1983. Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media., Martinus Nijhoff Publishers.
- Postma, G. W., 1955. Wave Propagation in Stratified Medium. Geophysics, 20, 780-806.
- Thomsen, L., 1986. Weak Elastic Anisotropy, Geophysics, 51, 1954-1966.

EK A

ENİNE YÖN BAĞIMSIZ BİR KATI İÇİN İŞLEÇ MATRİSİNİN TEKİL DEĞERLERİNİN VE R ' NİN BULUNMASI

(9) denkleminin düzlem dalga çözümü

$$U = U_0 e^{i(\omega t - k \cdot x)}, \quad (A.1)$$

olduğu kabul edilir (Payton, 1983). Burada ω açısal frekansı, k dalga sayısını ve x konum vektörünü tanımlamaktadır. Sabit elastisite katsayıları ve yoğunluk değerleri olduğu kabul edildiğinde ve kaynak terimi sıfır alındığında, (A.1) ifadesi (9)'da yerine konulduğunda

$$i\omega U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{M}_{31} & \tilde{M}_{32} & 0 & 0 \\ \tilde{M}_{41} & \tilde{M}_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} U, \quad (A.2)$$

elde edilir. Burada M bileşenleri

$$\tilde{M}_{31} = -\frac{c_{11}k_x^2 + c_{44}k_z^2}{\rho}, \quad (A.3a)$$

$$\tilde{M}_{32} = \tilde{M}_{41} = -\frac{(c_{13} + c_{44})k_x k_z}{\rho}, \quad (\text{A.3b})$$

$$\tilde{M}_{42} = -\frac{c_{44}k_x^2 + c_{33}k_z^2}{\rho}, \quad (\text{A.3c})$$

ile verilir. (A.2) denklemi $\lambda_i = iw$, $i = 1, 2, 3, 4$. tekildeğerleri için tekil değer denklemini düzenler. Buna göre (A.2) denkleminin karakteristiği

$$\lambda_i^4 - (\tilde{M}_{31} + \tilde{M}_{42})\lambda_i^2 + (\tilde{M}_{31}\tilde{M}_{42} - \tilde{M}_{41}\tilde{M}_{32}) = 0, \quad (\text{A.4})$$

ile verilir.

EY bir katı için $c_{11}, c_{33}, c_{44} > 0$ ve $|c_{13} + c_{44}| < ((c_{11}c_{33})^{1/2} + c_{44})$ dir (Payton, 1983). Bu $B \equiv -(\tilde{M}_{31} + \tilde{M}_{42}) > 0$.

$C \equiv (\tilde{M}_{31}\tilde{M}_{42} - \tilde{M}_{41}\tilde{M}_{32}) > 0$ ve $B^2 - 4C > 0$ olduğunu göstermektedir. Bu şartlarda (A.4) denkleminin kökleri, yani tekil değerleri

$$\lambda_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[|\tilde{M}_{31} + \tilde{M}_{42}| + \left[(\tilde{M}_{31} - \tilde{M}_{42})^2 + 4\tilde{M}_{41}\tilde{M}_{32} \right]^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (\text{A.5a})$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \quad (\text{A.5b})$$

$$\lambda_3 = \frac{i}{\sqrt{2}} \left[|\tilde{M}_{31} + \tilde{M}_{42}| - \left[(\tilde{M}_{31} - \tilde{M}_{42})^2 + 4\tilde{M}_{41}\tilde{M}_{32} \right]^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (\text{A.5c})$$

$$\lambda_4 = -\lambda_3, \quad (\text{A.5d})$$

olarak bulunur. Yön bağımsız bir ortam için (A.3) denklemleri

$$\tilde{M}_{31} = -\frac{(\lambda + 2\mu)k_x^2 + \mu k_z^2}{\rho}, \quad (\text{A.6a})$$

$$\tilde{M}_{32} = \tilde{M}_{41} = -\frac{(\lambda + \mu)k_x k_z}{\rho}, \quad (\text{A.6b})$$

$$\tilde{M}_{42} = -\frac{\mu k_x^2 + (\lambda + 2\mu)k_z^2}{\rho}, \quad (\text{A.6c})$$

olur. Bu denklemlerin (A.5) denklemlerinde yerine konulması ile

$$\lambda'_1 = i \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}, \quad \lambda'_2 = -\lambda'_1, \quad (\text{A.7a})$$

$$\lambda'_3 = i \left(\frac{\mu}{\rho} \right) (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}, \quad \lambda'_4 = -\lambda'_3, \quad (\text{A.7b})$$

elde edilir. Burada birinci ve ikinci tekil değer değerleri boyuna (longitudinal) dalga yayılımına, üçüncü ve dördüncü tekil değer değerleri makaslama (shear) dalga yayılımına uygundur. Bu değerler dağılım (dispersion) ilişkisini tanımlamaktadırlar. Buna göre

$$w = v_p (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}, \quad (\text{A.8a})$$

ve

$$w = v_s (k_x^2 + k_z^2)^{1/2}, \quad (\text{A.8b})$$

dir. Boyuna ve makaslama dalgaları için sırasıyla $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$ ve $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ dur.

Benzer şekilde EY katı için $\lambda_1 = iw$ ve $\lambda_3 = iw$ dağılım ilişkisini tanımlamaktadır. Dalga sayısı ifadesinin değiştirgen hali

